

## **Parte 2**

# **Serie e Trasformata di Fourier**



## Indice

<b>Parte 2. Serie e Trasformata di Fourier</b>	1
Capitolo 1. Serie di Fourier	5
Capitolo 2. La trasformata di Fourier	25
Complementi	43



# Capitolo 1

## Serie di Fourier

Lo scopo per cui sono state introdotte le serie di Fourier è quello di descrivere una qualunque<sup>1</sup> funzione periodica (reale di variabile reale) mediante funzioni periodiche elementari, ovvero seni e coseni.

I “mattoni” che useremo per ricostruire tutte le altre funzioni periodiche sono dunque le funzioni

$$x \mapsto \cos nx, \quad x \mapsto \sin nx$$

al variare del parametro  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Nel seguito, indicheremo con  $\mathcal{B}$  l’insieme di tutte queste funzioni. Osserviamo esplicitamente che, quando  $n = 0$ , la funzione  $\cos 0x$  coincide con 1: essa ci fornirà pertanto le costanti<sup>2</sup>. Inoltre,  $\sin 0x \equiv 0$ , sicché d’ora in poi la trascureremo perché non ci dà alcun contributo.

La famiglia delle funzioni contenute in  $\mathcal{B}$  ha un’utile proprietà: costituisce un **sistema ortonormale**.

---

<sup>1</sup>come sempre, in matematica, dovremo poi fare qualche ipotesi. Ci preoccuperemo di farle il meno restrittive possibile

<sup>2</sup>che sono anche loro funzioni periodiche!

LEMMA 1.1 (**Relazioni di ortogonalità**). *Se  $n$  e  $m$  sono due interi (non negativi) qualunque, valgono le relazioni*

$$(1.1) \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \neq 0, \\ 2\pi & \text{se } m = n = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(1.3) \quad \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

Lasciamo come esercizio la verifica di questo lemma (è sufficiente calcolare gli integrali utilizzando le formule di prostaferesi). In questa sede, ci pare più utile cercare di comprendere perché le formule (1.1)–(1.3) esprimono “relazioni di ortogonalità”. Richiamiamo brevemente quanto visto relativamente allo spazio euclideo  $N$ -dimensionale,  $\mathbb{R}^N$ . Un elemento di tale spazio è un vettore

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N : \quad \mathbf{u} = (u_j)_{j=1, \dots, N} = (u_1, \dots, u_N).$$

Sono assegnati

$$\text{prodotto scalare in } \mathbb{R}^N : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{j=1}^N u_j v_j ,$$

$$\text{norma in } \mathbb{R}^N : \quad |\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \left( \sum_{j=1}^N u_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ricordiamo che, in uno spazio euclideo, diciamo che due vettori sono **ortogonali** se il loro prodotto scalare è nullo.

In fondo, possiamo pensare ad una funzione  $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  come ad un vettore infinito-dimensionale, le cui componenti sono i

valori di  $u(x)$  al variare di  $x$  in nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ :

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{[0,2\pi]} : \quad \mathbf{u} = (u(x))_{x \in [0,2\pi]}.$$

Se poi mandiamo  $N$  all'infinito nella definizione di prodotto scalare, la sommatoria su  $j$  che va da 1 fino a  $N$  diventerà un integrale per  $x$  nell'intervallo fra 0 e  $2\pi$ . Assegnamo allora per analogia

$$\text{prodotto scalare in } \mathbb{R}^{[0,2\pi]}: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \int_0^{2\pi} u(x)v(x) dx,$$

$$\text{norma in } \mathbb{R}^{[0,2\pi]}: \quad |\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \left( \int_0^{2\pi} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ecco allora che le relazioni (1.1)–(1.3) possono essere sintetizzate come segue: *Le funzioni contenute nell'insieme  $\mathcal{B}$  sono a due a due ortogonali. Inoltre  $|\cos nx| = \sqrt{\pi} = |\sin nx|$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$ , mentre  $|\cos 0x| = |1| = \sqrt{2\pi}$ .*

**ESERCIZIO 2.1.** Verificare che le funzioni  $x$  e  $\cos x$  risultano ortogonali nello spazio  $\mathbb{R}^{[-\pi, \pi]}$ .

Il passo successivo del nostro programma consiste nel verificare che l'insieme  $\mathcal{B}$  costituisce una **base** dello spazio delle funzioni periodiche. In sostanza, vogliamo andare a rappresentare ogni funzione periodica  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  come combinazione lineare di seni e coseni:<sup>3</sup>

$$(1.4) \quad "f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)" .$$

Abbiamo usato le virgolette perché dobbiamo ancora precisare in che senso vale l'uguaglianza: a sinistra abbiamo una funzione, a destra una serie di funzioni! Per comodità futura, introduciamo una successione di funzioni (le somme parziali della serie di

---

<sup>3</sup>per convenzione, si sceglie di indicare con  $a_0/2$  anziché con  $a_0$  il coefficiente di  $\cos 0x$ .

Fourier)

$$(1.5) \quad S_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In questo caso,  $N$  indica un numero naturale che svolge il ruolo di indice di successione.

Possiamo precisare l'uguaglianza (1.4) dicendo che  $S_N$  converge a  $f$  per  $N \rightarrow +\infty$ . Poiché stiamo parlando di convergenza di funzioni, abbiamo due possibilità:

- puntuale:** per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , la successione (di numeri reali)  $S_N(x)$  converge a  $f(x)$ , ovvero per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ed  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $N(x, \varepsilon)$  tale che  $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se  $N \geq N(x, \varepsilon)$ ;
- uniforme:** la convergenza precedente vale uniformemente rispetto a  $x$ , ovvero per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $N(\varepsilon)$  tale che  $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se  $N \geq N(\varepsilon)$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Per capire cosa mettere al posto dei coefficienti  $a_n, b_n$ , rifacciamoci al caso finito dimensionale. Se  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N$  sono una base di  $\mathbb{R}^N$ , allora possiamo scrivere qualunque altro vettore  $\mathbf{v}$  come

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{u}^n, \quad \text{dove} \quad c_n = \frac{1}{|\mathbf{u}^n|^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^n.$$

Ciò ci suggerisce di porre

$$(1.6) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$(1.7) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

$$(1.8) \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

I coefficienti definiti dalle formule (1.6)–(1.8) sono detti **coefficienti di Fourier** della funzione  $f$ .

OSSERVAZIONE 1.2. Se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una qualunque funzione periodica di periodo  $2\pi$  e  $a$  è un qualunque numero reale, si ha

$$\int_a^{a+2\pi} g(x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) dx.$$

In particolare, possiamo definire i **coefficienti di Fourier** utilizzando come intervallo di riferimento qualunque intervallo di lunghezza  $2\pi$ , senza per questo cambiare il valore di tali coefficienti. Fino ad ora (e nel seguito) abbiamo scritto  $[0, 2\pi]$ , ma nulla ci vieta di utilizzare l'intervallo  $[-\pi, \pi]$  (vedi più avanti l'Esempio 1.1).

Per poter definire i **coefficienti di Fourier**, non abbiamo bisogno che la funzione  $f$  sia poi molto regolare: ad esempio, non ci serve che sia continua. È facile convincersi che l'unica ipotesi necessaria per assicurare che i coefficienti di Fourier siano ben definiti è che  $f$  sia assolutamente integrabile, secondo la definizione seguente.

DEFINIZIONE 1.1. *Siano dati un intervallo  $I$  (chiuso o aperto, limitato o illimitato) ed una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Diciamo che la funzione  $f$  è*

**assolutamente integrabile** sull'intervallo  $I$  se

$$\int_I |f(x)| dx < +\infty,$$

**di quadrato integrabile** sull'intervallo  $I$  se  $f^2$  è assolutamente integrabile, ovvero

$$\int_I |f(x)|^2 dx < +\infty,$$

**generalmente continua** sull'intervallo  $I$  se

*Caso I* ( $I$  è limitato) esistono un numero infinito di punti  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  contenuti in  $I$  tali che

i)  $f$  è continua in tutti i punti di  $I$ , esclusi al più  $x_0, x_1, \dots, x_k$ ,

ii) nei punti  $x_i$  (con  $i = 0, 1, \dots, k$ ),  $f$  ammette limite destro e sinistro, ed essi sono finiti.

*Caso II* ( $I$  è illimitato)  $f$  è generalmente continua (secondo la definizione data nel I caso) su ogni intervallo limitato contenuto in  $I$

**regolare a tratti** sull'intervallo  $I$  se sia  $f$  che la sua derivata  $f'$  sono generalmente continue su  $I$ .

Se  $f$  è una funzione generalmente continua, si introduce la cosiddetta funzione **normalizzata**:

$$(1.9) \quad f^*(x) := \frac{1}{2} [f(x^-) + f(x^+)],$$

dove

$$f(x^-) := \lim_{t \rightarrow x^-} f(t), \quad f(x^+) := \lim_{t \rightarrow x^+} f(t).$$

La nozione di funzione generalmente continua è più estesa di quella di funzione continua, perchè ammettiamo che nei punti  $t_i$  ci siano discontinuità di tipo salto. Certamente ogni funzione continua sulla chiusura di  $I$  è anche generalmente continua! È vero che ogni funzione continua su un intervallo aperto è ivi generalmente continua?

Si noti che la normalizzata  $f^*$  coincide con  $f$  in tutti i punti in cui quest'ultima è continua.

Osserviamo anche che una funzione regolare a tratti può avere singolarità della derivata (cioè punti in cui la funzione è continua ma non derivabile): solo i punti angolosi saranno ammessi, non le cuspidi (vedi Esempio 2.1).

I concetti di funzione assolutamente integrabile e generalmente

continua sono distinti, cioè ci sono funzioni assolutamente integrabili ma non generalmente continue e viceversa (vedi Esempi 2.2 e 2.3). Tuttavia in un intervallo limitato, ogni funzione generalmente continua è assolutamente integrabile secondo Riemann.

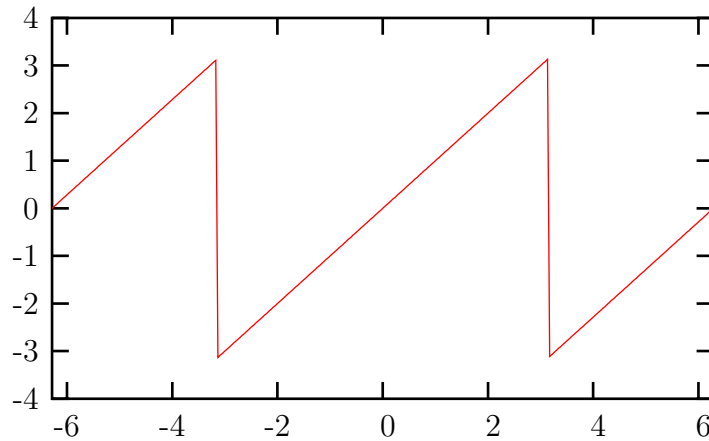
Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il teorema fondamentale sulle serie di Fourier.

**TEOREMA 1.3 (Convergenza puntuale).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti. Allora l'uguaglianza (1.4) vale nel senso puntuale, cioè la funzione  $S_N$ , assegnata in (1.5), converge puntualmente alla normalizzata  $f^*$ .*

Vediamo graficamente un esempio di approssimazione mediante serie di Fourier.

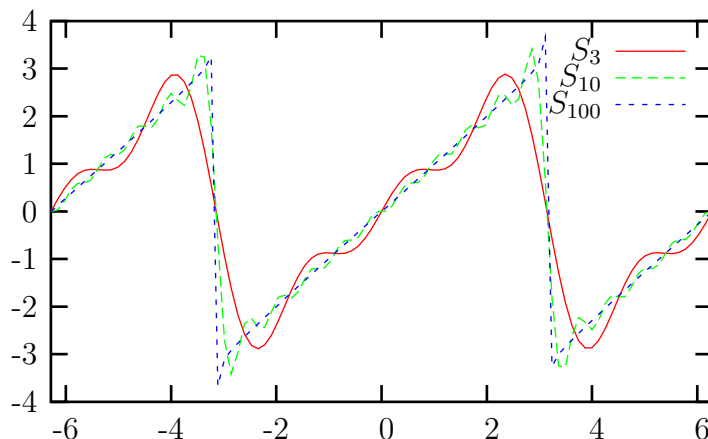
**ESEMPIO 1.1.** Consideriamo la funzione periodica di periodo  $2\pi$  assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



All'aumentare di  $N$ , la relativa somma parziale  $S_N$  approssima

sempre meglio la funzione  $f$ .



Siamo ora pronti per affrontare la dimostrazione del **Teorema di convergenza puntuale**. Cominciamo col richiamare una disuguaglianza classica per le serie di Fourier (in ipotesi opportune, diventa un'uguaglianza, detta **identità di Parseval**)

LEMMA 1.4 (**Disuguaglianza di Bessel**). *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ha periodo  $2\pi$  ed è assolutamente integrabile su  $[0, 2\pi]$ , allora*

$$(1.10) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

DIM. Calcoliamo il quadrato di  $S_N(x)$ :

$$\begin{aligned} S_N^2(x) &= \\ &= \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^N [a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)] \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \right) \end{aligned}$$

quindi (per la linearità dell'integrale e le **relazioni d' ortogonalità**)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2);$$

per definizione dei coefficienti

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) dx &= \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \right) & \\ = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2); & \end{aligned}$$

quindi (essendo l' integrando non negativo e per la linearità)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(x) - f(x))^2 dx = \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) S_N(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx & \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) & \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

e, passando al limite su  $N \rightarrow \infty$  la tesi.  $\square$

La **disuguaglianza di Bessel** ci interessa soprattutto per questo suo corollario (che discende subito dalla condizione necessaria di convergenza delle serie):

COROLLARIO 1.5. *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione **periodica assolutamente integrabile**, allora i suoi coefficienti di Fourier soddisfano*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Per convenienza futura, introduciamo il cosiddetto **nucleo di Dirichlet**

$$(1.11) \quad D_N(t) := 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nt) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Enunciamo due lemmi tecnici sul nucleo di Dirichlet, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

LEMMA 1.6. *Abbiamo*

$$(1.12) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1,$$

$$(1.13) \quad D_N(t) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

LEMMA 1.7. *Nelle ipotesi del **Teorema di convergenza puntuale** abbiamo*

$$(1.14) \quad S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_N(t) dt.$$

Diamo ora lo schema generale della dimostrazione.

DIM. DEL **TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE**. Fissiamo  $x \in \mathbb{R}$  e supponiamo dapprima che  $f$  sia continua e derivabile in  $x$ . Dobbiamo controllare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [S_N(x) - f(x)] = 0.$$

Poiché  $f(x)$  è costante rispetto a  $t$ , la relazione (1.12) implica che

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(t) dt.$$

Ricordando poi la (1.14), abbiamo che

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_N(t) dt.$$

Ora, la (1.13) ci dice

$$S_N(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left( \left(N + \frac{1}{2}\right) t \right) dt$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{f(x+2\tau) - f(x)}{\sin \tau} \sin \left( (2N+1) \tau \right) d\tau.$$

Poniamo poi

$$\bar{f}(\tau) := \frac{f(x+2\tau) - f(x)}{\sin \tau}.$$

Evidentemente, la funzione  $\bar{f}(\tau)$  ha periodo  $2\pi$ , e dunque anche  $\bar{f}(\tau) \sin \left( (2N+1) \tau \right)$  ha periodo  $2\pi$ . Dunque

$$S_N(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\tau) \sin \left( (2N+1) \tau \right) d\tau$$

$$= \bar{b}_{2N+1},$$

dove abbiamo indicato con  $\bar{b}_{2N+1}$  il coefficiente di Fourier (relativo al termine  $\sin \left( (2N+1) \tau \right)$ ) della funzione  $\bar{f}(\tau)$ . Possiamo allora dedurre la nostra tesi dal Corollario 1.5, se accertiamo che  $\bar{f}$  sia **assolutamente integrabile** in  $[-\pi, \pi]$ . A tal fine, è sufficiente controllare che  $\bar{f}$  sia **generalmente continua**. L'unico problema può essere dato da  $\tau = 0$ , ma lì abbiamo

$$(1.15) \quad \bar{f}(\tau) = 2 \underbrace{\frac{f(x+2\tau) - f(x)}{2\tau}}_{\downarrow f'(x)} \underbrace{\frac{\tau}{\sin \tau}}_{\downarrow 1} \rightarrow 2f'(x).$$

Se per caso  $f$  non è derivabile in  $x$ , l'ipotesi che  $f'$  è generalmente continua garantisce ugualmente che  $\bar{f}$  ha limite destro e sinistro (finiti) in  $\tau = 0$ ; questo è sufficiente per garantire l'assoluta integrabilità di  $\bar{f}$  e dunque la nostra tesi (via il Corollario 1.5). Infine, se  $f$  non è neppure continua in  $x$ , otteniamo ancora la tesi sostituendo  $f(x)$  con  $f^*(x)$  e spezzando l'integrale in  $\tau > 0$  e  $\tau < 0$ .  $\square$

In realtà, la convergenza della serie di Fourier è uniforme, laddove la funzione  $f$  risulti continua, ma non lo dimostreremo.

**TEOREMA 1.8 (Convergenza uniforme).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti, e sia poi  $I$  un intervallo su cui  $f$  è continua. Allora l'uguaglianza (1.4) vale nel senso uniforme su  $I$ , cioè la funzione  $S_N$ , assegnata in (1.5), converge uniformemente a  $f$  sull'intervallo  $I$ .*

Dalla convergenza uniforme discendono due conseguenze che ci saranno utili nel seguito: possiamo sia integrare che derivare termine a termine le serie di Fourier.

**COROLLARIO 1.9 (Derivazione termine a termine).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti, e  $x \in \mathbb{R}$  un punto in cui  $f$  è derivabile. Allora l'uguaglianza formale*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right)' \\ &= \sum_{n \geq 1} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx) \end{aligned}$$

è corretta. Precisamente, se indichiamo con  $S'_N$  la successione delle derivate delle somme parziali:

$$\begin{aligned} S'_N(x) &= \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right)' \\ &= \sum_{n=1}^N (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx), \end{aligned}$$

abbiamo che la successione  $S'_N(x)$  converge a  $f'(x)$ .

**COROLLARIO 1.10 (Integrazione termine a termine).** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *periodica* di periodo  $2\pi$  e *regolare a tratti*, e  $\alpha < \beta$  due numeri reali. Allora l'uguaglianza formale

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2}(\beta - \alpha) + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{a_n}{n} (\sin n\beta - \sin n\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_n}{n} (\cos n\beta - \cos n\alpha) \right) \end{aligned}$$

è corretta. Precisamente, se indichiamo con  $\mathbb{S}_N$  la successione degli integrali delle somme parziali:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_N(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2}(\beta - \alpha) + \sum_{n=1}^N \left( \frac{a_n}{n} (\sin n\beta - \sin n\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_n}{n} (\cos n\beta - \cos n\alpha) \right), \end{aligned}$$

abbiamo che la successione  $\mathbb{S}_N$  converge a  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ .

Lo sviluppo in serie di Fourier di funzioni pari<sup>4</sup> risulta particolarmente semplice, perché compaiono solo gli elementi “pari” della base  $\mathcal{B}$ , ovvero i coseni. Analogamente, nello sviluppo di una funzione dispari<sup>5</sup> compaiono solo i seni.

PROPOSIZIONE 1.11 (Sviluppo di funzioni pari/dispari). *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , regolare a tratti e pari. Allora il suo sviluppo in serie di Fourier è*

$$(1.16) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx,$$

dove

$$(1.17) \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx.$$

Analogamente, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , regolare a tratti e dispari, allora il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$(1.18) \quad \sum_{n \geq 1} b_n \sin nx,$$

dove

$$(1.19) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx.$$

DIM. Poiché per controllare la parità di una funzione lo 0 gioca un ruolo fondamentale (è un punto di simmetria), in questo contesto ci è comodo metterci nell'intervallo di riferimento

---

<sup>4</sup>cioè per cui  $f(-x) = f(x)$

<sup>5</sup>cioè per cui  $f(-x) = -f(x)$

$[-\pi, \pi]$ . Non dobbiamo far altro che controllare che

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= 0\end{aligned}$$

nel caso di una funzione  $f$  pari, oppure

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx\end{aligned}$$

nel caso di una funzione dispari. Notate che, in tutte queste uguaglianze, nel membro di sinistra abbiamo scritto la definizione generica di coefficienti di Fourier secondo l'Osservazione 1.2.

Ora, è facile controllare che

$$\begin{aligned}f(x) \cos nx &\text{ è } \begin{cases} \text{pari} & \text{se } f \text{ è pari,} \\ \text{dispari} & \text{se } f \text{ è dispari,} \end{cases} \\ f(x) \sin nx &\text{ è } \begin{cases} \text{dispari} & \text{se } f \text{ è pari,} \\ \text{pari} & \text{se } f \text{ è dispari.} \end{cases}\end{aligned}$$

Pertanto la nostra proposizione discende direttamente dal lemma che andiamo ad enunciare.

LEMMA 1.12. *Per ogni numero positivo  $a$  e per ogni funzione  $g$  integrabile sull'intervallo  $[-a, a]$  si ha:*

$$\int_{-a}^a g(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a g(x) dx & \text{se } g \text{ è pari,} \\ 0 & \text{se } g \text{ è dispari.} \end{cases}$$

□

Il fatto che il periodo sia proprio  $2\pi$  è una semplificazione che serve solo a fissare le idee, ma nulla ci vieta di prendere qualunque altro periodo.

OSSERVAZIONE 1.13 (**Periodo arbitrario**). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione **periodica** di periodo  $2\ell$  e **regolare a tratti**. Allora la funzione

$$\tilde{f}(t) := f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)$$

è **periodica** di periodo  $2\pi$  e **regolare a tratti**.

Effettuando il cambiamento di variabile  $x = \frac{\ell}{\pi}t$  (e ricordando l'Osservazione 1.2), si verifica che i coefficienti di Fourier della funzione  $\tilde{f}$  sono dati da

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) \cos nt \, dt \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{t_o}^{t_o+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dt, \end{aligned}$$

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{t_o}^{t_o+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.22) \quad \frac{\tilde{a}_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) dt \\
 &= \frac{1}{2\ell} \int_{t_o}^{t_o+2\ell} f(x) dx,
 \end{aligned}$$

dove  $t_o$  è un qualunque numero reale.

Applicando ora il **Teorema di convergenza puntuale** a  $\tilde{f}$  otteniamo che (nel senso della convergenza puntuale)

$$\tilde{f}^*(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( \tilde{a}_n \cos nt + \tilde{b}_n \sin nt \right).$$

Poiché  $f^*(x) = \tilde{f}^*(\pi x/\ell)$ , ciò significa che

$$(1.23) \quad f^*(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( \tilde{a}_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \tilde{b}_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right).$$

nel senso della convergenza puntuale. In altre parole, possiamo sviluppare in serie di Fourier qualunque funzione **periodica**, a patto di definire opportunamente i coefficienti di Fourier (dati da (1.20)–(1.22) anziché (1.6)–(1.8)) e prendere le giuste funzioni di base ( $\cos n\pi x/\ell$  e  $\sin n\pi x/\ell$  anziché  $\cos nx$  e  $\sin nx$ ).

Ovviamente restano valide anche le conclusioni del **Teorema di convergenza uniforme** e dei corollari di **derivazione** e di **integrazione** termine a termine.

**OSSERVAZIONE 1.14 (Forma complessa).** Ricordando la definizione di esponenziale complesso

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

possiamo scrivere sia la serie che i **coefficienti di Fourier in forma complessa** come

$$(1.24) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{\ell}},$$

dove

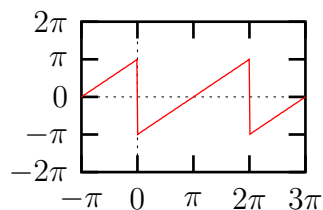
$$(1.25) \quad c_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{\ell}} dx. \quad \text{per } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

per una funzione periodica di periodo  $2\ell$ .

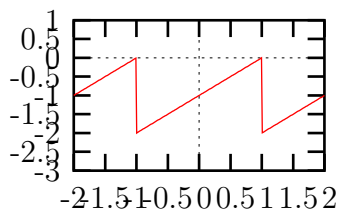
Ancora, valgono le conclusioni dei Teoremi di **convergenza puntuale** e **convergenza uniforme** e dei corollari di **derivazione** e di **integrazione** termine a termine.

**ESERCIZIO 2.2.** Sviluppare in serie di Fourier le seguenti funzioni periodiche:

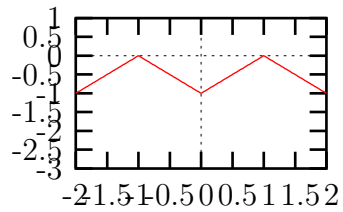
$$1) f(x) = \begin{cases} x - \pi & \text{se } 0 < x < 2\pi, \\ & \text{di periodo } 2\pi, \end{cases}$$



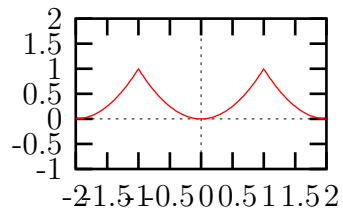
$$2) f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } -1 < x < 1, \\ & \text{di periodo } 2, \end{cases}$$



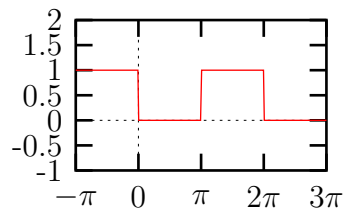
$$3) f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se } -1 < x < 1, \\ \text{di periodo } 2, \end{cases}$$



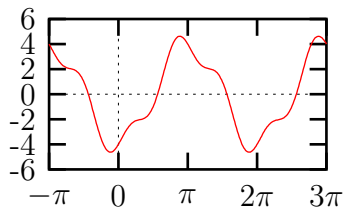
$$4) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 < x < 1, \\ \text{di periodo } 2, \end{cases}$$



$$5) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < \pi, \\ 1 & \text{se } \pi < x < 2\pi, \\ \text{di periodo } 2\pi, \end{cases}$$



$$6) f(x) = \sin 3x - 4 \cos x.$$





## Capitolo 2

# La trasformata di Fourier

Vogliamo ora estendere la nozione di sviluppo di Fourier anche alle funzioni non periodiche. Tenendo presente che il “periodo” di una funzione periodica è il più piccolo intervallo dopo di cui la funzione si ripete tale e quale, possiamo pensare che una funzione non periodica è, in fondo, una funzione periodica con periodo infinito. Questa intuizione ci suggerisce di “passare al limite” nella definizione dei **coefficienti di Fourier** mandando il periodo  $\ell$  all’infinito.

DEFINIZIONE 2.1. *Siano  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una qualunque funzione e  $\lambda$  un numero reale; chiamiamo **integrale di Fourier***

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Affinché l’integrale (2.1) sia definito, serve che l’integrando

$$x \mapsto f(x) e^{-i\lambda x}$$

sia integrabile.

Precisamente, diciamo che la funzione  $f$  è **trasformabile secondo Fourier** se il rispettivo integrale di Fourier converge per almeno un  $\lambda$  reale.

In tal caso, la **trasformata di Fourier** di  $f$  è la funzione

$$(2.2) \quad \hat{f}(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Potrete facilmente verificare (fatelo come esercizio!) che vale la seguente sufficiente di trasformabilità:

**PROPOSIZIONE 2.1.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **generalmente continua** e **assolutamente integrabile** (su  $\mathbb{R}$ ). Allora  $f$  è **trasformabile** e la sua **trasformata di Fourier** è definita per ogni valore reale di  $\lambda$ .*

Anche se le funzioni assolutamente integrabili non sono le uniche che possiamo trasformare, esse risultano particolarmente interessanti perché godono di altre proprietà.

**PROPOSIZIONE 2.2.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  **generalmente continua** e **assolutamente integrabile**; indichiamo poi con  $\hat{f}$  la sua **trasformata di Fourier**. Allora*

- (i)  $\hat{f}$  è continua su  $\mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \hat{f}(\lambda) = 0$ .

Che legame c'è fra **trasformata di Fourier** e **serie di Fourier**? Approssimiamo la funzione  $f$  con due funzioni  $f_\ell$  e  $f_\ell^P$ , così definite:

$$\text{troncata di } f: \quad f_\ell(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } -\ell < x < \ell, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{periodicizzata di } f: \quad f_\ell^P(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } -\ell < x < \ell, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\ell. \end{cases}$$

È facile convincersi che, al tendere di  $\ell$  a  $+\infty$ , sia la funzione  $f_\ell$  che la funzione  $f_\ell^P$  convergono a  $f$ . Scriviamo poi la

trasformata di Fourier di  $f_\ell$ :

$$\widehat{f}_\ell(\lambda) = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

e i coefficienti di Fourier in forma complessa per  $f_\ell^P$ :

$$c_n^\ell = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} dx.$$

Vediamo che:

$$c_n^\ell = \frac{1}{2\ell} \widehat{f}_\ell\left(\frac{n\pi}{\ell}\right).$$

Pertanto, il Teorema di convergenza puntuale afferma che vale l'uguaglianza:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\ell\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}}$$

per ogni  $x \in (-\ell, \ell)$ . Vorremmo ora mandare  $\ell$  a  $+\infty$  per ottenere uno sviluppo in serie per  $f$  valido per tutti gli  $x$  in  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ . La situazione non è così semplice, perché i periodi “interi” ( $\lambda = \frac{n\pi}{\ell}$ , con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) sono “troppo pochi” per descrivere una qualunque funzione  $f$ . Per mantenerci più generali possibile, prenderemo non solo gli  $n$  interi, ma tutti i numeri reali, e dunque la serie diventerà un integrale:

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\ell\left(\frac{n\pi}{\ell}\right) e^{-i\frac{n\pi x}{\ell}} dn.$$

Effettuando poi il cambiamento di variabile  $\lambda = \frac{n\pi}{\ell}$  si ottiene<sup>1</sup>

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\ell(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

---

<sup>1</sup>ricordando che  $d\lambda = \frac{\pi}{\ell} dn$

Ora, l'unico punto in cui appare  $\ell$  è il membro di destra, perché abbiamo preso non la trasformata di Fourier di  $f$ , bensì della sua troncata  $f_\ell$ . Quando è lecito “passare al limite”? ci serve che

$$(2.3) \quad \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left| \widehat{f}_\ell(\lambda) - \widehat{f}(\lambda) \right| = 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } \lambda.$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}_\ell(\lambda) - \widehat{f}(\lambda) \right| &= \left| \int_{-\ell}^{+\ell} f(x) e^{-i\lambda x} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{-\ell} f(x) e^{-i\lambda x} dx + \int_{+\ell}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{-\ell} |f(x) e^{-i\lambda x}| dx + \int_{+\ell}^{+\infty} |f(x) e^{-i\lambda x}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{-\ell} |f(x)| dx + \int_{+\ell}^{+\infty} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

è facile rendersi conto che se  $f$  è **assolutamente integrabile**, allora (2.3) è vera. Abbiamo così dimostrato il fondamentale:

**TEOREMA 2.3 (fondamentale sulla trasformata di Fourier).**

*Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione assolutamente integrabile e regolare a tratti.*

*Allora*

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = f^*(x)$$

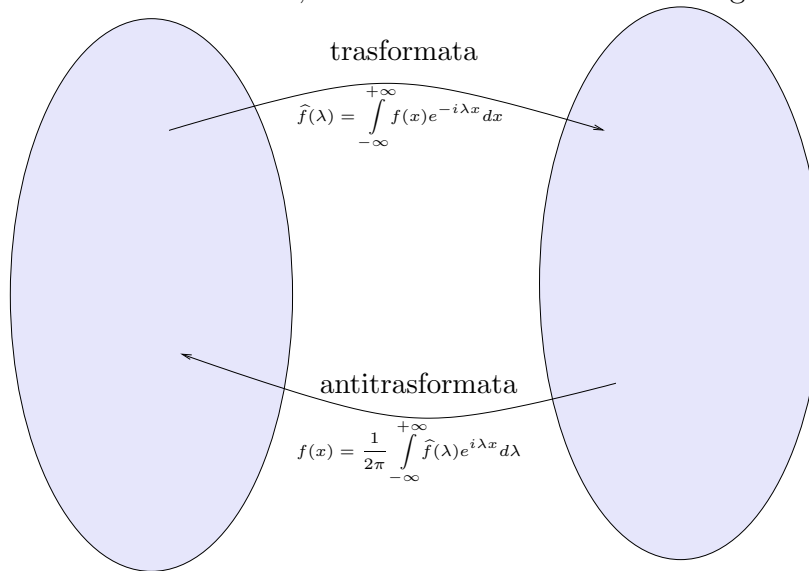
*per ogni  $x$  in  $\mathbb{R}$ .*

Risulta allora naturale definire:

**DEFINIZIONE 2.2.** *Data una funzione  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diciamo **antitrasformata di Fourier** di  $g$  la funzione*

$$(2.5) \quad \widehat{g}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \widehat{g}(-x)$$

L'uguaglianza (2.4) stabilisce che l'applicazione “trasformata di Fourier” è invertibile, come viene sintetizzato dal diagramma:



Se l'applicazione “trasformata di Fourier” è invertibile, in particolare sarà iniettiva: in altri termini, due funzioni che hanno la stessa trasformata di Fourier coincidono in tutti i punti di continuità.

**COROLLARIO 2.4.** *Supponiamo che  $f_1$  e  $f_2$  siano assolutamente integrabili e regolari a tratti su  $\mathbb{R}$ . Se  $\widehat{f}_1(\lambda) = \widehat{f}_2(\lambda)$  per ogni valore reale di  $\lambda$ , allora  $f_1(x) = f_2(x)$  in ogni  $x$  in cui sia  $f_1$  nche  $f_2$  sono continue.*

**DIM.** Sia  $x$  un punto in cui sia  $f_1$  nche  $f_2$  sono continue. Applicando la formula di antitrasformazione (2.4) prima a  $f_1$ , poi a  $f_2$ , si ottiene

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_1(\lambda)e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_2(\lambda)e^{-i\lambda x} d\lambda = f_2(x).$$

□

Vediamo ora alcune utili proprietà della **trasformata di Fourier**. La prima proprietà, che discende in modo immediato dalla linearità dell'integrale, stabilisce che la **trasformata di Fourier** è un'applicazione lineare.

**PROPOSIZIONE 2.5 (Linearità della trasformata di Fourier).** *Se  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni assolutamente integrabili e regolari a tratti su  $\mathbb{R}$ , mentre  $c_1$  e  $c_2$  sono numeri reali, abbiamo*

$$c_1 \widehat{f_1 + c_2 f_2}(\lambda) = c_1 \widehat{f_1}(\lambda) + c_2 \widehat{f_2}(\lambda) \quad \text{per ogni valore di } \lambda.$$

La seguente proprietà (già nota per le **serie di Fourier**), è spesso utile per il calcolo delle trasformate.

**PROPOSIZIONE 2.6 (Trasformata di Fourier di funzioni pari/dispari).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione assolutamente integrabile e regolare. Se, inoltre,  $f$  è una funzione pari, la trasformata di Fourier può essere scritta usando la formula semplificata*

$$(2.6) \quad \widehat{f}(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx.$$

*Inoltre, la formula di inversione (2.4) diventa*

$$(2.7) \quad f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \cos(\lambda x) dx.$$

*Analogamente, se  $f$  è dispari si ha:*

$$(2.8) \quad \widehat{f}(\lambda) = \frac{2}{i} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx,$$

$$(2.9) \quad f^*(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\lambda) \sin(\lambda x) dx.$$

DIM. Scriviamo esplicitamente

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx.\end{aligned}$$

Le relazioni (2.6) e (2.8) seguono allora dal Lemma 1.12.

In modo simile si ottengono anche le relazioni (2.6) e (2.8), dopo aver osservato che la trasformata di una funzione pari (rispettivamente, dispari) è a sua volta pari (rispettivamente, dispari).

□

Su alcuni testi si trovano definite anche la “trasformata seno di Fourier” e la “trasformata coseno di Fourier”, che sono leggermente diverse. Per non fare confusione, andate a vedere la “tabella di conversione”.

Il prossimo teorema afferma che, così come vedremo per la trasformata di Laplace, anche la **trasformata di Fourier** trasforma la derivazione in un prodotto. Questa rilevante proprietà apre la strada a numerose applicazioni alle equazioni differenziali.

**TEOREMA 2.7 (Morfismo fra derivazione e prodotto).** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assolutamente integrabile e regolare a tratti e indichiamo con  $\widehat{f}$  la sua trasformata di Fourier.*

*Se, inoltre, la funzione  $x \mapsto x f(x)$  è assolutamente integrabile, allora  $\widehat{f}$  è derivabile e vale la formula:*

$$(2.10) \quad \frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda) = -i \widehat{xf}(\lambda) \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Viceversa, se  $f$  è anche continua e  $f'$  è a sua volta assolutamente integrabile e regolare a tratti, allora*

$$(2.11) \quad \widehat{f}'(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda) \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

DIM. Calcoliamo formalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \widehat{f}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} (f(x) e^{-i\lambda x}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-i\lambda x} dx = \widehat{-ixf}(\lambda) \end{aligned}$$

Per essere sicuri che il passaggio indicato con il punto interrogativo sia lecito, dobbiamo controllare di poter applicare il teorema di derivazione dell'integrale rispetto ad un parametro. In altre parole, dobbiamo controllare che la funzione  $x \mapsto \frac{d}{d\lambda} (f(x) e^{-i\lambda x})$  sia **assolutamente integrabile** per ogni  $\lambda$ . Questo è vero perché

$$\left| \frac{d}{d\lambda} (f(x) e^{-i\lambda x}) \right| = |-ix f(x) e^{-i\lambda x}| = |x f(x)|$$

è assolutamente integrabile per ipotesi.

Riguardo alla proprietà inversa, per la definizione di trasformata si ha

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &\stackrel{\text{I} \times \text{P}}{=} [f(x) e^{-i\lambda x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} -i\lambda f(x) e^{-i\lambda x} dx \\ &= i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \widehat{f}(\lambda). \end{aligned}$$

Si noti che il termine

$$[f(x) e^{-i\lambda x}]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{T_- \rightarrow -\infty} \lim_{T_+ \rightarrow +\infty} [f(x) e^{-i\lambda x}]_{T_-}^{T_+}$$

è zero come conseguenza del criterio necessario di integrabilità su  $\mathbb{R}$  applicato alla funzione  $x \mapsto |f(x) e^{-i\lambda x}| = |f(x)|$ .  $\square$

È bene notare che la trasformata di Fourier non è propriamente “lineare” rispetto al prodotto. In altri termini, non è vero che la trasformata del prodotto è uguale al prodotto delle trasformate. Vale, invece, una proprietà un po’ più raffinata: la **trasformata di Fourier** trasforma il prodotto per convoluzione nell’usuale prodotto puntuale fra funzioni.

**DEFINIZIONE 2.3.** *se  $f$  e  $g$  sono due funzioni a quadrato sommabile e generalmente continue, il loro **prodotto per convoluzione** è una nuova funzione, che indichiamo con  $F * G$ , definita come segue*

$$(2.12) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

**PROPOSIZIONE 2.8.** *Per ogni  $f$  e  $g$  assolutamente integrabili e regolari a tratti su  $\mathbb{R}$ , vale*

$$\widehat{f \cdot g} = \widehat{f * g}.$$

**DIM.** Dalla definizione di trasformata abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-i\lambda y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(y)e^{-i\lambda(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Effettuiamo ora il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

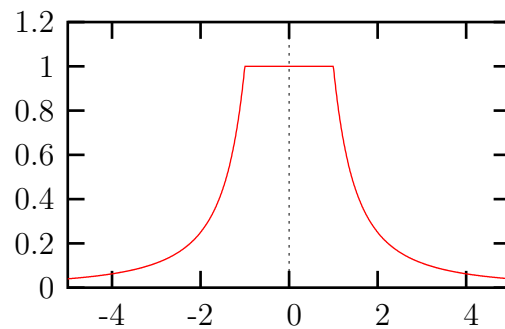
Dunque

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u-v)e^{-i\lambda u}dudv \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u-v)dv \right) e^{-i\lambda u}du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(u)e^{-i\lambda u}du = \widehat{f * g}(\lambda).
 \end{aligned}$$

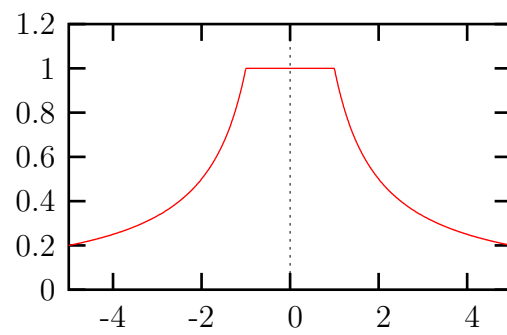
□

ESERCIZIO 2.3 (Trasformabilità). Stabilire quali delle seguenti funzioni sono trasformabili (secondo Fourier):

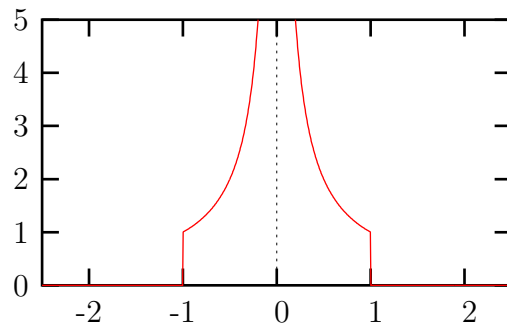
$$1) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



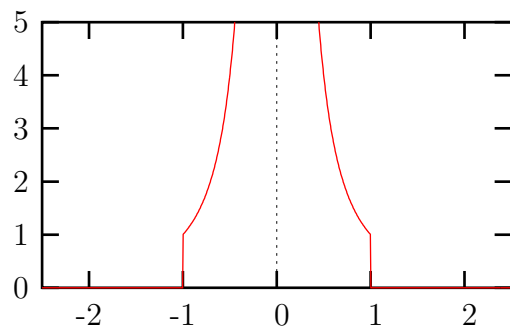
$$2) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



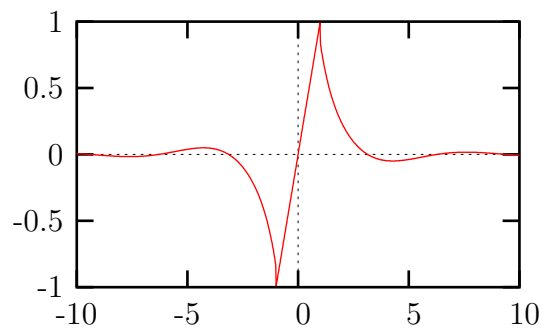
$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



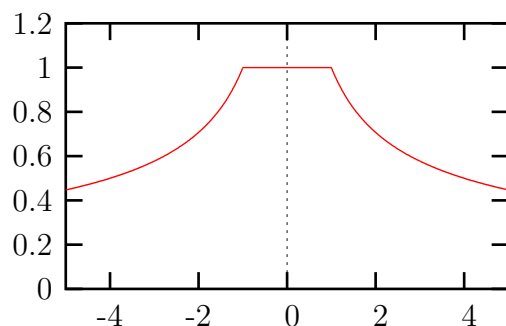
$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



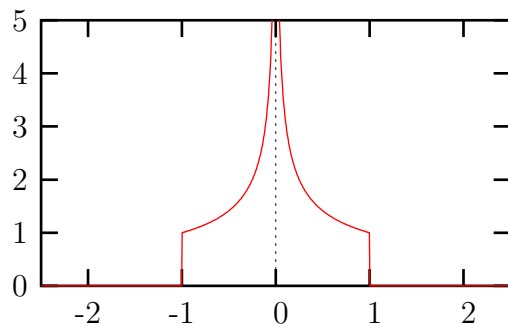
$$5) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{\sin x}{x^2} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



$$6) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}} & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



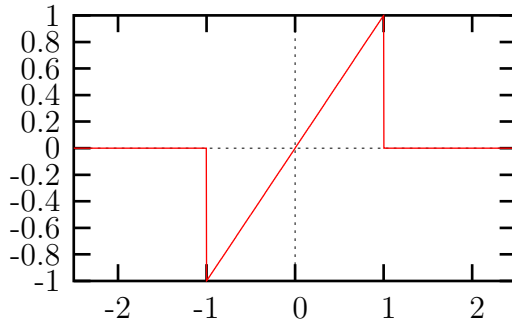
ESERCIZIO 2.4 (Trasformata di funzioni non assolutamente integrabili). Sebbene la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  non sia assolutamente integrabile, possiamo definire la sua trasformata di Fourier prendendo l'integrale ai valori principali:

$$\hat{f}(\lambda) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-T}^{-\varepsilon} \frac{e^{-i\lambda x}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^T \frac{e^{-i\lambda x}}{x} dx \right].$$

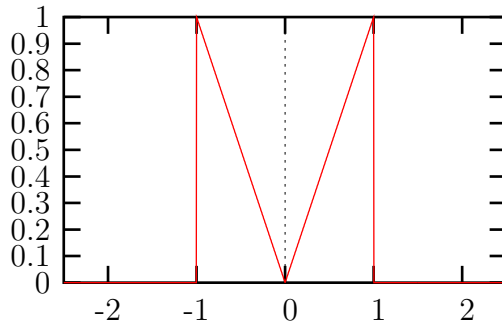
Calcolare  $\hat{f}$  e verificare che non verifica nessuna delle conclusioni della Proposizione 2.2.

ESERCIZIO 2.5 (Calcolo della trasformata di Fourier). Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

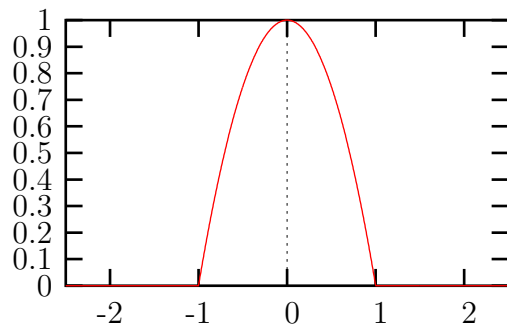
$$1) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



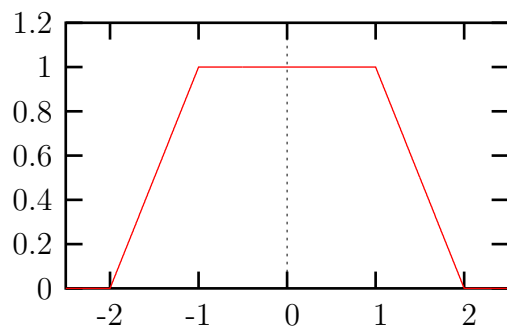
$$2) f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



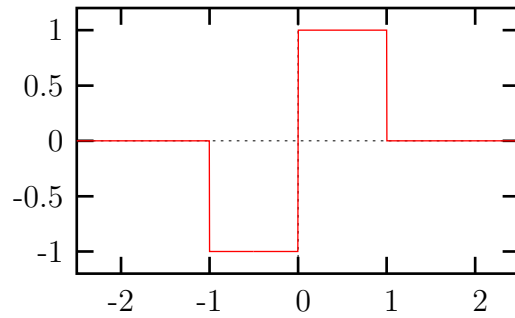
$$3) f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



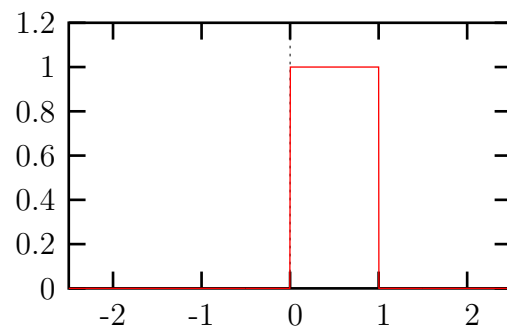
$$4) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 2 - |x| & \text{se } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



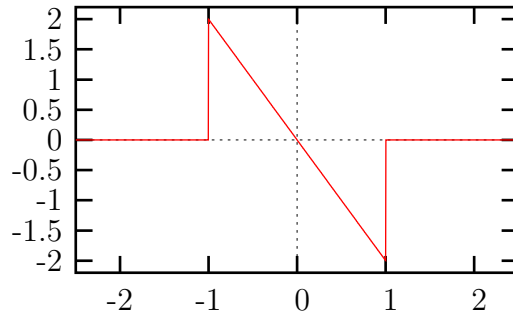
$$5) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



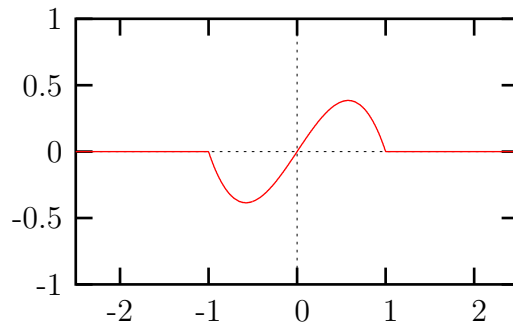
$$6) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



$$7) f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



$$8) f(x) = \begin{cases} x(1-x^2) & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



ESERCIZIO 2.6 (Calcolo di integrali mediante la trasformata di Fourier). Utilizzando i risultati dell'esercizio precedente, calcolare i seguenti integrali:

- 1)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda (\lambda \cos \lambda - \sin \lambda)}{\lambda^2} d\lambda,$
- 2)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda/2) (\cos \lambda - 1 + \lambda \sin \lambda)}{\lambda^2} d\lambda,$
- 3)  $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^3} d\lambda,$

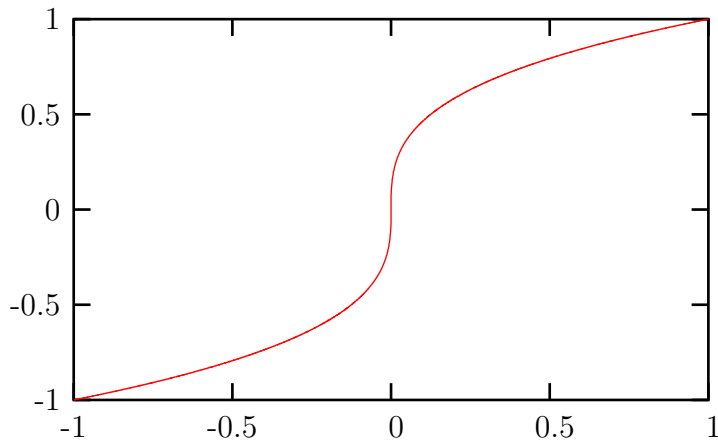
$$4) \int_0^{+\infty} \frac{1 + \cos \lambda - 2 \sin \lambda}{\lambda^2} d\lambda.$$

## Complementi

ESEMPIO 2.1. Nell'intervallo  $[-1, 1]$ , la funzione

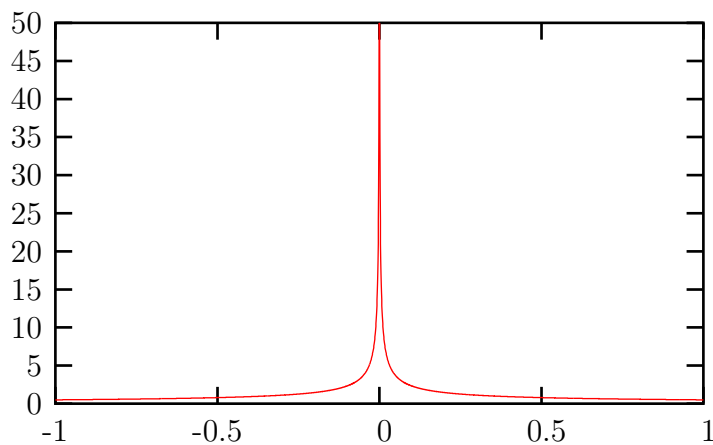
$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

è generalmente continua (addirittura è continua) ma non regolare a tratti.

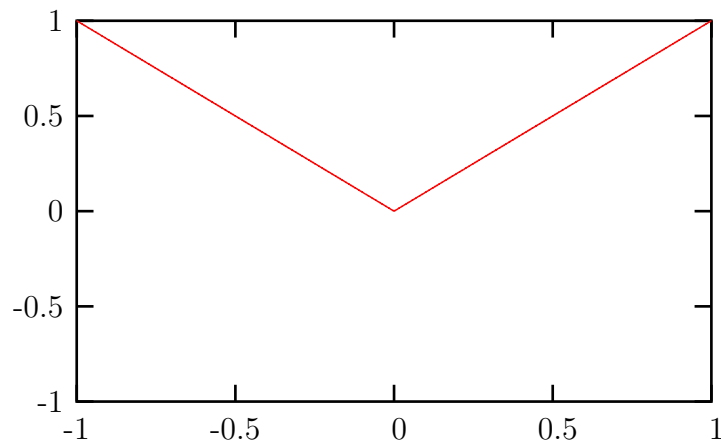


Infatti la sua derivata  $f'(x) = 1/3x^{\frac{2}{3}}$  non è generalmente continua, in quanto in  $x = 0$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty :$$



Invece, nello stesso intervallo la funzione  $|x|$  è regolare a tratti.



Infatti la sua derivata è pari a  $+1$  se  $x > 0$  e  $-1$  se  $x < 0$ ; in  $x = 0$  si ha

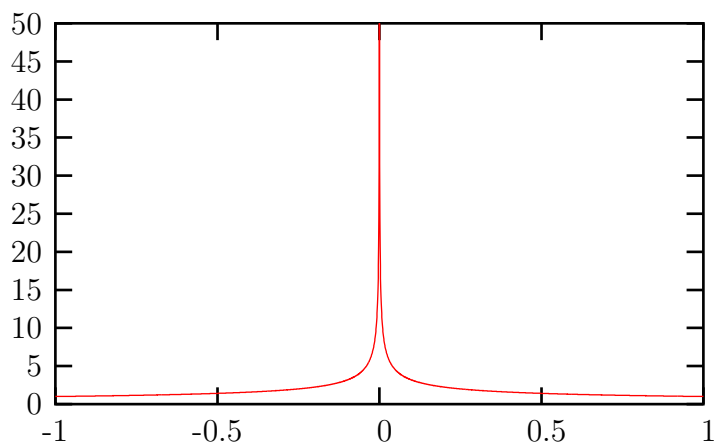
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1.$$

[...torna su](#)

ESEMPIO 2.2. Nell'intervallo  $[-1, 1]$ , la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

è assolutamente integrabile ma non generalmente continua:

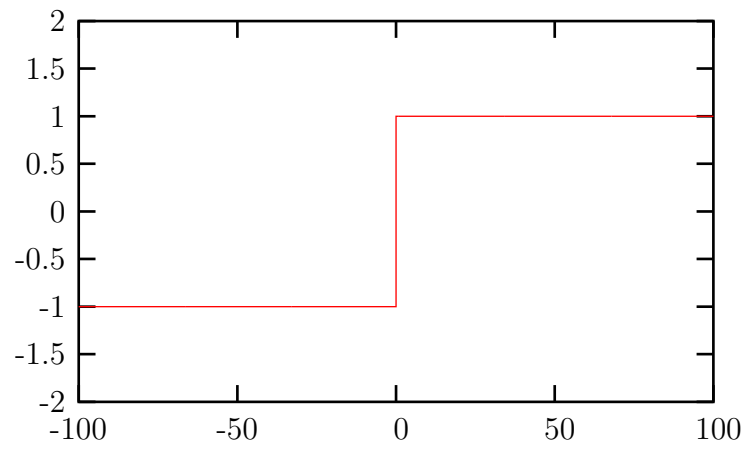


In un intervallo limitato, ogni funzione generalmente continua è limitata, sicché è integrabile secondo Riemann. Se, però, ci mettiamo in un intervallo illimitato, ciò non è più vero.

ESEMPIO 2.3. Nell'intervallo  $\mathbb{R}$ , la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

è generalmente continua ma non assolutamente integrabile:



[...torna su](#)

DEFINIZIONE 2.4. Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è *assolutamente integrabile e regolare a tratti*, definiamo

$$\text{trasformata coseno: } \widehat{f}_C(\lambda) := 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx,$$

$$\text{trasformata seno: } \widehat{f}_S(\lambda) := 2 \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx.$$

Se, inoltre,  $f$  è una funzione pari, la formula (2.6) ci dice che

$$\widehat{f}_C(\lambda) = \widehat{f}(\lambda),$$

sicché la formula di antitrasformazione (2.7) diventa

$$(2.13) \quad f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}_C(x) \cos \lambda x \, dx.$$

Se, invece,  $f$  è una funzione dispari, la formula (2.8) ci dice che

$$\widehat{f}_S(\lambda) = i \widehat{f}(\lambda),$$

sicché la formula di antitrasformazione (2.9) diventa

$$(2.14) \quad f^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}_S(x) \sin \lambda x \, dx.$$

Le formule (2.13) e (2.14) sono note come formule di antitrasformazione di tipo coseno e seno, rispettivamente.

[...torna su](#)