

# Trasformata di Fourier

Definizione

Proprietà

Convoluzione

Teorema di Parseval

Potenza/Energia e densità spettrale di potenza/energia

Correlazione ed autocorrelazione



# Trasformata di Fourier: definizione

- Dato un segnale non periodico, esso può essere scritto mediante la formula

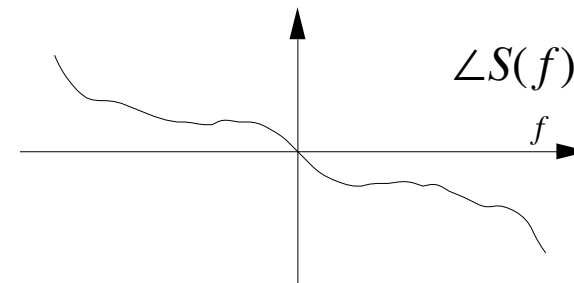
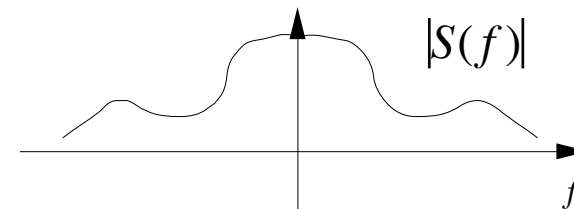
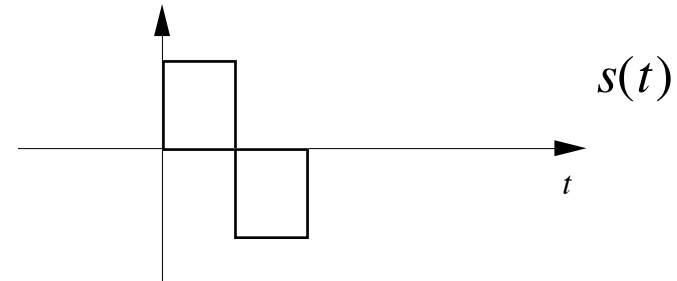
$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

dove

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Le due equazioni si chiamano “antitrasformata” e “trasformata” di Fourier.  $S(t)$  e  $S(f)$  si dicono “coppia di Fourier”.

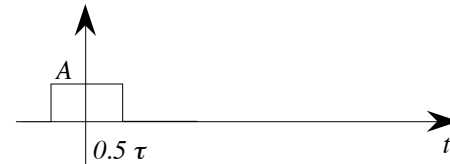
N.B.: si badi ancora una volta che la funzione  $S(f)$  è una funzione a valori complessi



# Trasformata di Fourier: esempio

- Si prenda un impulso alto  $A$  e lungo  $\tau$ , rappresentato dalla formula:

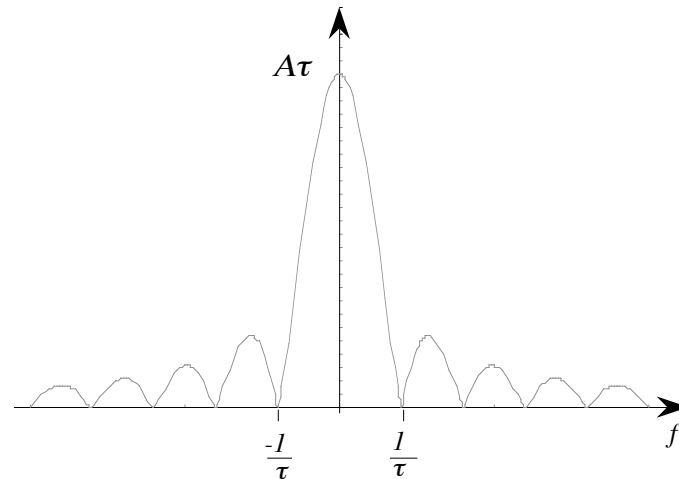
$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$



- La sua trasformata di Fourier è:

$$S(f) = A\tau \operatorname{sinc}(f\tau)$$

- N.B.: questa trasformata è esattamente l'involuppo dei coefficienti della serie di Fourier che si ottiene "periodicizzando" l'impulso



# Trasformata di Fourier: proprietà

- Linearità

$$as_1(t) + bs_2(t) \Rightarrow aS_1(f) + bS_2(f)$$

- Invarianza alla traslazione

$$s(t - t_1) \Rightarrow S(f)e^{-j2\pi ft_1}$$

- Sfasamento nel tempo

$$s(t)e^{j2\pi f_1 t} \Rightarrow S(f - f_1)$$

- Integrale

$$\int s(t) dt \Rightarrow -j \frac{1}{2\pi f} S(f)$$

- Derivata

$$\frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow j2\pi f S(f)$$



# Moltiplicazione per un coseno

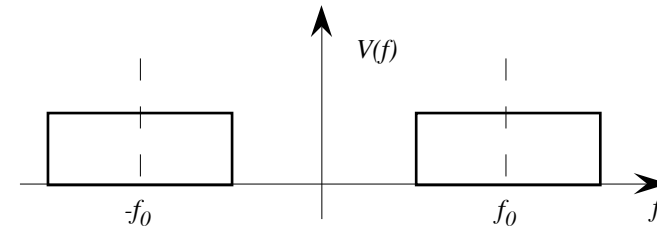
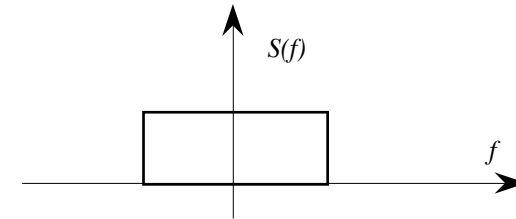
- Si supponga di moltiplicare un segnale  $s(t)$  per una funzione sinusoidale

$$v(t) = s(t) \cos(\omega_0 t)$$

- Sfruttando le proprietà appena vista, si ottiene che

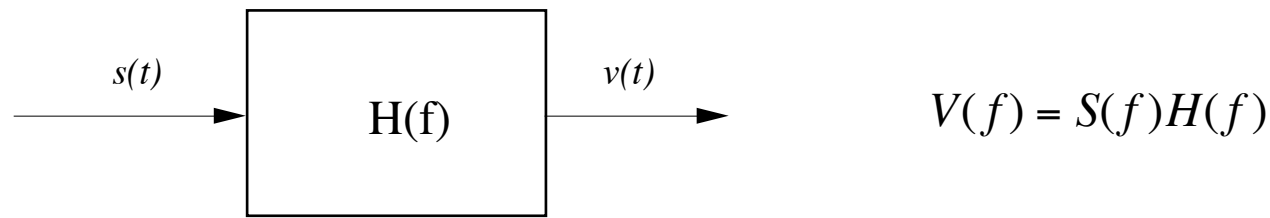
$$V(f) = \frac{1}{2}(S(f - f_0) + S(f + f_0))$$

- ... e cioè una traslazione in frequenza dello spettro originale del segnale



# Convoluzione...

- Per analogia con quanto visto per i segnali periodici, far passare un segnale attraverso un blocco lineare corrisponde a moltiplicare la sua trasformata per la funzione di trasferimento del blocco:



- In termini di tempo (e non di frequenza) questo corrisponde a fare la convoluzione tra  $s(t)$  e l'antitrasformata di  $H(f)$ , detta “risposta impulsiva”

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

## ... Convoluzione

- La proprietà viene dalla seguente dimostrazione:

$$\begin{aligned}v(t) &= F^{-1}(S(f)H(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi f(t-\tau)} df \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) h(t-\tau) d\tau\end{aligned}$$

- Si noti che, se la funzione in ingresso al blocco è una delta di Dirac, si ottiene:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(t)$$

il che giustifica il nome di “risposta impulsiva”.



# Teorema di Parseval

- Partendo dalla definizione di *Energia* di un segnale

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt$$

- e utilizzando il risultato sulla convoluzione appena visto, si ottiene:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) S^*(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

per cui e' possibile definire una *densità spettrale di energia* nella forma di:

$$G(f) = |S(f)|^2 \quad E(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} |S(f)|^2 df + \int_{-f_2}^{-f_1} |S(f)|^2 df$$



# Energia attraverso un blocco lineare

- Tenendo conto della relazione tra le trasformate di Fourier dei segnali in ingresso ed uscita da un sistema lineare, si ha che

$$G_0(f) = |V(f)|^2 = |H(f)|^2 |S(f)|^2 = |H(f)|^2 G(f)$$

- Si noti che un sistema che sfasa proporzionalmente le frequenze non produce variazioni di energia:

$$H(f) = e^{-j2\pi f T_D} \quad \Rightarrow \quad E_0 = E$$

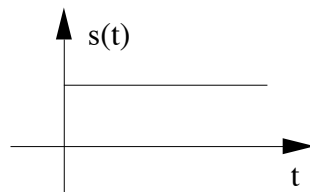
- Similmente, la forma d'onda in uscita si dice *indistorta* se ha la stessa *forma* dell'ingresso:

$$H(f) = h_0 e^{-j2\pi f T_D} \quad \Rightarrow \quad v(t) = h_0 s(t - T_D)$$

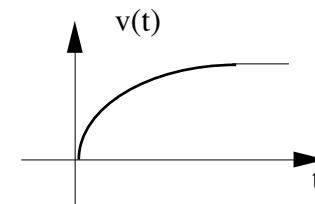
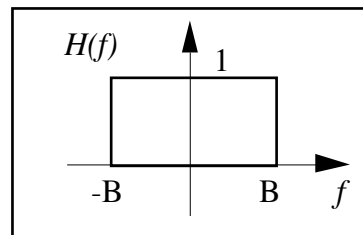


# Filtri

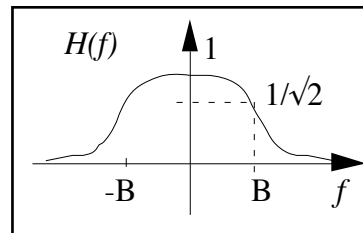
- Si definisce *filtro* un qualunque sistema lineare.
- Più in particolare, si parla di *filtri passa-basso*, *passa-alto*, *passa-banda* e *arresta-banda*.



*filtro ideale*



*filtro reale*



# Correlazione

- La *correlazione* tra due forme d'onda è una misura della loro *somiglianza*. In generale è definita come

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

- Per segnali periodici la formula si riduce a

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$

... mentre per segnali non periodici ad energia finita si tramuta in

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt$$



# Correlazione e potenza

- Supponendo di avere due segnali, qual è la potenza (o l'energia) della loro somma?

$$P_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s_1(t) + s_2(t)]^2 dt$$

e, più in generale, tale potenza cambia (e come) se uno dei due viene traslato?

$$P_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s_1(t) + s_2(t + \tau)]^2 dt$$

- La risposta si ottiene grazie alla correlazione:

$$P_{12} = P_1 + P_2 + 2R_{12}(\tau)$$

- Perciò:
  - due forme d'onda scorrelate hanno potenza che è la somma delle singole potenze
  - altrimenti, c'è un termine in più che tiene conto dei *collegamenti* tra i 2 segnali



# Autocorrelazione

- La correlazione di una forma d'onda con se stessa è detta *autocorrelazione*:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau) dt$$

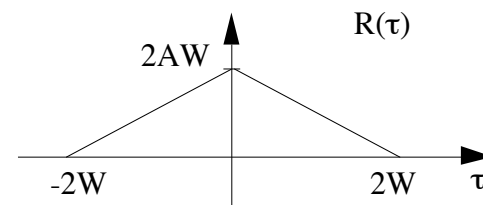
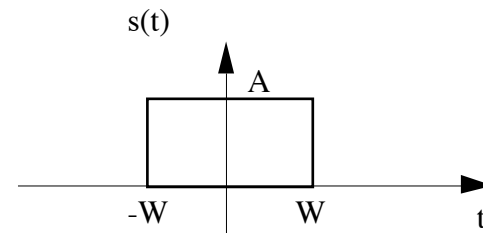
- e soddisfa alle condizioni

$$R(0) = E$$

$$R(0) \geq R(\tau)$$

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

- N.B.: nel caso di una forma d'onda di potenza vale la stessa cosa, ma con la potenza al posto dell'energia.



# Autocorrelazione e densità spettrale di energia

- Dalle caratteristiche della trasformata di Fourier sappiamo che

$$F^{-1}(S(f)S(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)s(t-\tau) d\tau$$

- Dato che  $S(-f) = S^*(f)$  si avrà anche

$$F^{-1}(S(f)S^*(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)s(\tau-t) d\tau$$

e infine che

$$F^{-1}(S(f)S^*(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\tau) dt = R(-\tau) = R(\tau)$$

e cioè

$$F^{-1}(|S(f)|^2) = F^{-1}(G(f)) = R(\tau)$$



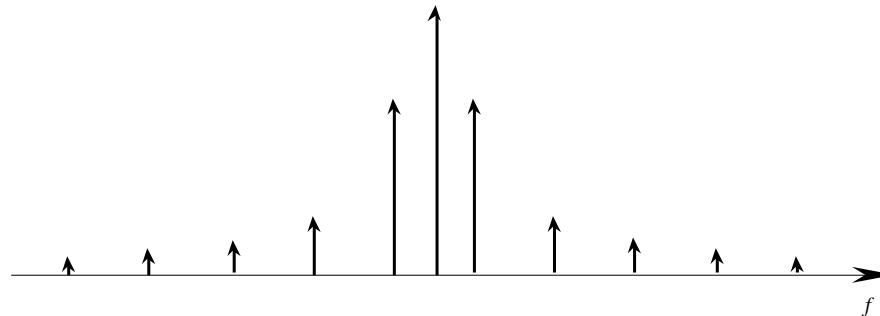
# Trasformata di Fourier di un segnale periodico?

- Si può definire la trasformata di Fourier di un segnale periodico, utilizzando la delta di Dirac. Infatti:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}} \Rightarrow S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n t}{T_0}} e^{-j2\pi f t} dt$$

- E dunque

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\left(f - \frac{n}{T_0}\right)t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$



## Autocorrelazione di un segnale periodico ...

- Introducendo un segnale periodico sotto forma di serie di Fourier nell'espressione della autocorrelazione, si ottiene

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{j\frac{2\pi m t}{T_0}} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n(t+\tau)}{T_0}} \right) dt$$

- Scambiando l'ordine dell'integrazione e delle sommatorie, si ha

$$R(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_{mn} \quad I_{mn} = \frac{1}{T_0} e^{j\frac{2\pi n \tau}{T_0}} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} c_m c_n e^{j\frac{2\pi(m+n)t}{T_0}} dt$$

- da cui

$$I_{mn} = c_m c_n e^{j\frac{2\pi n \tau}{T_0}} \frac{\sin(\pi(m+n))}{\pi(m+n)}$$



## ... Autocorrelazione di un segnale periodico

- Di conseguenza:

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n} e^{j \frac{2\pi n \tau}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{j \frac{2\pi n \tau}{T_0}}$$

- Volendo infine calcolare la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione

$$F[R(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = G(f)$$

... e dunque anche nel caso di segnali periodici l'autocorrelazione e la densità spettrale di potenza sono una *coppia di Fourier*.

